Aufgabe 1

Für die folgenden Funktionsgleichungen ist die Scheitelpunktsform der Gleichung zu ermitteln und der Scheitelpunkt anzugeben.

a) $f(x)=\frac{1}{2}\cdot x^2+x-3$ b) $g(x)=-3\cdot x-9\cdot x-4$ c) $h(x)=\frac{2}{3}\cdot x^2-2\cdot x+\frac{3}{2}$

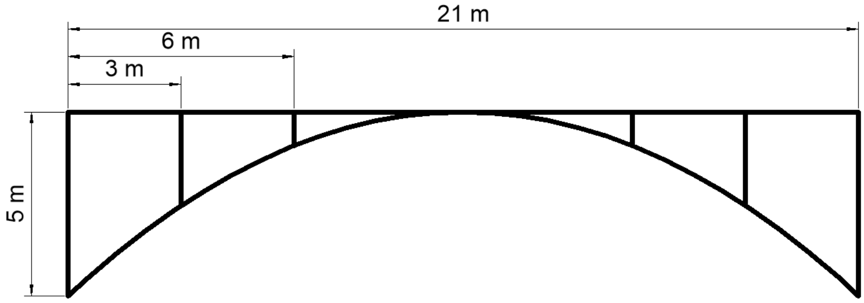
Aufgabe 2

Ermitteln Sie die Gleichung in der Form $y=a\cdot x^2+b\cdot x+c$. Gegeben ist jeweils der Scheitelpunkt und ein weiterer Punkt, durch den der Funktionsgraph verläuft.

a) S(0;1) und P(2;3) b) S(2;1) und P(4;5) c) S(-2;3) und P(1;0)

Aufgabe 3

Von einer Brücke sind die aus der Abbildung ersichtlichen Angaben gegeben. Der Bogen lässt sich mit einer Parabel beschreiben. Ermitteln Sie die Funktionsgleichung und die Länge der Streben.



Aufgabe 4

Ermitteln Sie für die Funktionen aus Aufgabe 1 die Nullstellen.

Aufgabe 5

Bestimmen Sie die Lösungsmenge der quadratischen Gleichungen.

a) $x^2-45\cdot x=0$ b) $4\cdot x^2+9\cdot x-23=0$ c) $2\cdot x^2+6=2x+18$

Lösungen:

Aufgabe 1

a) $\boxed{f(x)=\frac{1}{2}\cdot x^2+x-3}$ 1. Schritt: Normalform herstellen $f(x)=\frac{1}{2}\cdot(x^2+2\cdot x-6)$

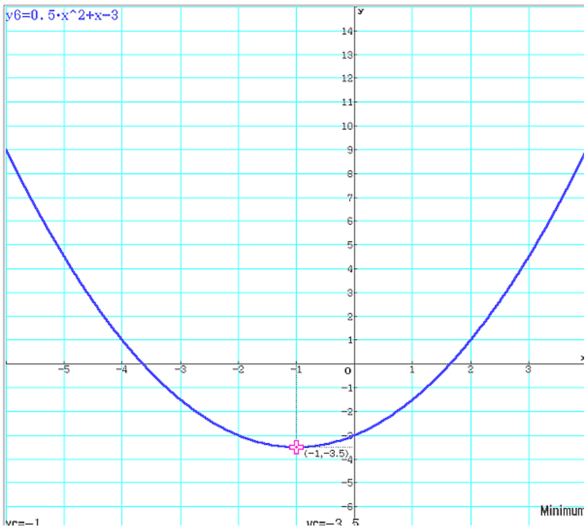
2. Schritt: quadratische Ergänzung berechnen: $\left(\frac{p}{2}\right)^2=\left(\frac{2}{2}\right)^2=1$

3. Schritt: neue Gleichung:

$$f(x)=\frac{1}{2}((x+\mathbf{1})^2\mathbf{-1}-6)=\frac{1}{2}((x+1)^2-7)$$

$$f(x)=\frac{1}{2}\cdot(x+1)^2-\frac{7}{2}$$

Scheitelpunkt: S(-1 ; -3,5)



b) $\boxed{g(x)=-3\cdot x^2-9\cdot x-4}$ 1. Schritt: Normalform herstellen $g(x)=-3\cdot\left(x^2+3\cdot x+\frac{4}{3}\right)$

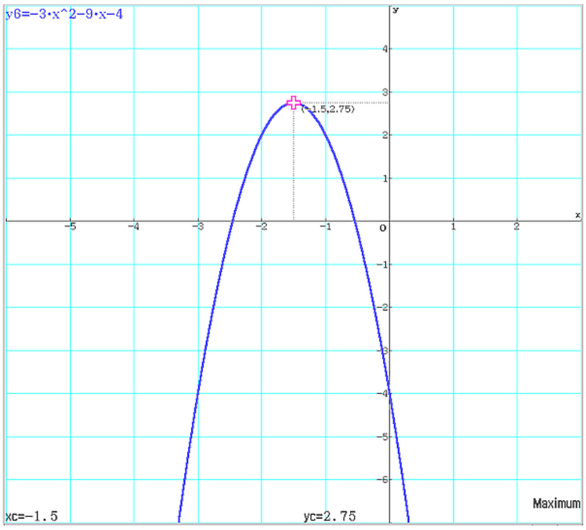
2. Schritt: quadratische Ergänzung berechnen: $\left(\frac{p}{2}\right)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$

3. Schritt: neue Gleichung:

$$g(x)=-3\cdot\left(\left(x+\mathbf{\frac{3}{2}}\right)^2-\mathbf{\frac{9}{4}}+\frac{4}{3}\right)=-3\left(\left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{11}{12}\right)$$

$$g(x)=-3\cdot\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{11}{4}$$

Scheitelpunkt: S(-1,5 ; 2,75)



c) $h(x)=\frac{2}{3}\cdot x^2-2\cdot x+\frac{3}{2}$ 1. Schritt: Normalform herstellen $h(x)=\frac{2}{3}\cdot\left(x^2-3\cdot x+\frac{9}{4}\right)$

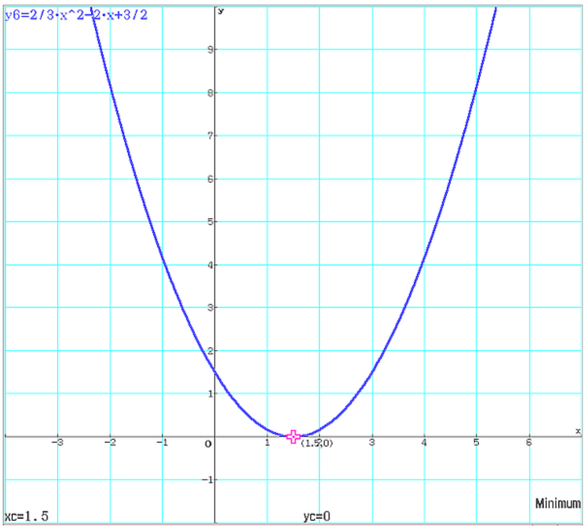
2. Schritt: quadratische Ergänzung berechnen: $\left(\frac{p}{2}\right)^2=\left(\frac{-3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}$

3. Schritt: neue Gleichung:

$$h(x)=\frac{2}{3}\cdot\left(\left(x-\mathbf{\frac{3}{2}}\right)^2-\mathbf{\frac{9}{4}}+\frac{9}{4}\right)=\frac{2}{3}\cdot\left(\left(x-\frac{3}{2}\right)^2\right)$$

$$h(x)=\frac{2}{3}\cdot\left(x-\frac{3}{2}\right)^2$$

Scheitelpunkt: S(1,5 ; 0)



Aufgabe 2

a) S(0;1) und P(2;3)

1. Schritt: Funktionsgleichung in Scheitelpunktsform aufstellen
$f(x)=a\cdot(x-0)^2+1=a\cdot x^2+1$

2. Schritt: Punkt P einsetzen und a berechnen
$3=a\cdot 2^2+1=a\cdot 4+1$; $2=4\cdot a$; $a=\frac{1}{2}$

3. Schritt: Funktionsgleichung ergänzen und Probe ausführen
$f(x)=\frac{1}{2}\cdot x^2+1$; $f(0)=\frac{1}{2}\cdot 0^2+1=1$ und $f(2)=\frac{1}{2}\cdot 2^2+1=3$

b) S(2;1) und P(4;5)

1. Schritt: Funktionsgleichung in Scheitelpunktsform aufstellen
$f(x)=a\cdot(x-2)^2+1$

2. Schritt: Punkt P einsetzen und a berechnen
$5=a\cdot(4-2)^2+1=a\cdot 4+1$; $4=4\cdot a$; $a=1$

3. Schritt: Funktionsgleichung ergänzen $f(x)=(x-2)^2+1$

4. Schritt: Funktionsgleichung umformen und Probe ausführen
$f(x)=x^2-2\cdot 2\cdot x+2^2+1=x^2-4\cdot x+5$; $f(2)=2^2-4\cdot 2+5=9-8=1$ und
$f(4)=4^2-4\cdot 4+5=21-16=5$

c) S(-2;3) und P(1;0)

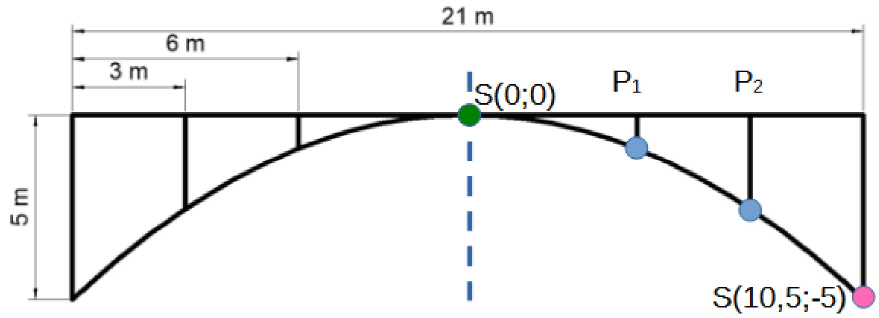
1. Schritt: Funktionsgleichung in Scheitelpunktsform aufstellen
$f(x)=a\cdot(x+2)^2+3$

2. Schritt: Punkt P einsetzen und a berechnen
$0=a\cdot(1+2)^2+3=a\cdot 9+3$; $-3=9\cdot a$; $a=-\frac{1}{3}$

3. Schritt: Funktionsgleichung ergänzen $f(x)=-\frac{1}{3}\cdot(x+2)^2+3$

4. Schritt: Funktionsgleichung umformen und Probe ausführen
$f(x)=-\frac{1}{3}\cdot(x^2+2\cdot 2\cdot x+2^2)+3=-\frac{1}{3}\cdot(x^2+4\cdot x+4)+3$;
$f(x)=-\frac{1}{3}\cdot x^2-\frac{4}{3}\cdot x-\frac{4}{3}+3=-\frac{1}{3}\cdot x^2-\frac{4}{3}\cdot x+\frac{5}{3}$
$f(-2)=-\frac{1}{3}\cdot(-2)^2-\frac{4}{3}\cdot(-2)+\frac{5}{3}=-\frac{4}{3}+\frac{8}{3}+\frac{5}{3}=\frac{9}{3}=3$ und
$f(1)=-\frac{1}{3}\cdot 1^2-\frac{4}{3}\cdot 1+\frac{5}{3}=-\frac{1}{3}-\frac{4}{3}+\frac{5}{3}=0$

Aufgabe 3



1. Schritt: Ein Koordinatensystem so in der Abbildung eintragen, dass der Scheitelpunkt des Brückenbogens im Koordinatenursprung liegt.

2. Schritt: Funktionsgleichung notieren: $f(x)=a\cdot(x-0)^2+0=a\cdot x^2$; x: [m]

3. Schritt: Einen Punkt einsetzen und a ermitteln: P(10,5; -5)

$f(10{,}5)=-5=a\cdot 10{,}5^2$; $a=\frac{-5}{10{,}5^2}=\frac{-5}{110{,}25}=\frac{-500}{11025}=-\frac{20}{441}$

4. Schritt: Funktionsgleichung ergänzen: $f(x)=-\frac{20}{441}\cdot x^2$

Funktionswerte an den Stellen $P_1(4{,}5;y_1)$ und $P_2(7{,}5;y_2)$ berechnen:

$f(4{,}5)=-\frac{20}{441}\cdot 4{,}5^2\approx -0{,}9184$: Länge der Strebe ca. 91,8 cm

$f(7{,}5)=-\frac{20}{441}\cdot 7{,}5^2\approx -2{,}551$: Länge der Strebe ca. 2,55 m

---

Aufgabe 4

a) Scheitelpunktsform verwenden: $f(x)=0=\frac{1}{2}\cdot(x+1)^2-\frac{7}{2}$

$$0=\frac{1}{2}\cdot(x+1)^2-\frac{7}{2}$$
$$\frac{7}{2}\cdot\frac{2}{1}=(x+1)^2$$
$$\pm\sqrt{7}=x+1$$
$$x_{1,2}=\pm\sqrt{7}-1$$

$x_1=+\sqrt{7}-1$ und $x_2=-\sqrt{7}-1$

oder $f(x)=0=\frac{1}{2}\cdot x^2+x-3$ und die Lösungsformel anwenden:

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-\frac{4\cdot 1}{2}\cdot(-3)}}{\frac{2\cdot 1}{2}}=-1\pm\sqrt{7}$$

b) Scheitelpunktsform verwenden: $g(x)=0=-3\cdot\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{11}{4}$

$$0=-3\cdot\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{11}{4}$$

$$-\frac{11}{4}\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2$$

$$\pm\sqrt{\frac{11}{12}}=x+\frac{3}{2}$$

$$\pm\sqrt{\frac{11}{12}}-\frac{3}{2}=x$$

$$x=-\frac{3}{2}\pm\sqrt{\frac{11}{3\cdot 2^2}}$$

$$x=-\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{11\cdot 3}{3\cdot 3}}$$

$$x_{1,2}=-\frac{3}{2}\mp\frac{1}{6}\cdot\sqrt{33}$$

$x_1=-\frac{3}{2}+\frac{1}{6}\cdot\sqrt{33}$ und $x_2=-\frac{3}{2}-\frac{1}{6}\cdot\sqrt{33}$

oder $g(x)=-3\cdot x-9\cdot x-4$ und die Lösungsformel anwenden:

$$x_{1,2}=\frac{9\pm\sqrt{(-9)^2-(4\cdot(-3)\cdot(-4))}}{2\cdot(-3)}=\frac{9\pm\sqrt{33}}{(-6)}=-\frac{9}{6}\pm\left(-\frac{1}{6}\right)\cdot\sqrt{33}=-\frac{3}{2}\mp\frac{1}{6}\sqrt{33}$$

c) Scheitelpunktsform verwenden: $h(x)=\frac{2}{3}\cdot\left(x-\frac{3}{2}\right)^2$

$0=\frac{2}{3}\cdot\left(x-\frac{3}{2}\right)^2$; $0=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2$; $\sqrt{0}=x-\frac{3}{2}$; $x_1=\frac{3}{2}$

oder $h(x)=\frac{2}{3}\cdot x^2-2\cdot x+\frac{3}{2}$ und die Lösungsformel anwenden:

$$x_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{(2)^2-\left(4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)\cdot\left(\frac{3}{2}\right)\right)}}{2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)}=\frac{2\pm\sqrt{0}}{\left(\frac{4}{3}\right)}=\frac{2\cdot 3}{4}=\frac{3}{2}$$

Aufgabe 5

a) $x^2-45\cdot x=0$; $x\cdot(x-45)=0$; L = {0;45}

b) $4\cdot x^2+9\cdot x-23=0$; $4\cdot\left(x^2+\frac{9}{4}\cdot x-\frac{23}{4}\right)=0$;

$$x_{1,2}=\frac{-\frac{9}{4}\pm\sqrt{\left(\frac{9}{4}\right)^2-\left(4\cdot 1\cdot\left(-\frac{23}{4}\right)\right)}}{2\cdot 1}=\frac{-\frac{9}{4}\pm\sqrt{\left(\frac{81}{16}\right)+23}}{2}=-\frac{9}{8}\pm\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{449}{16}}=-\frac{9}{8}\pm\frac{1}{8}\cdot\sqrt{449}$$

$$L=\left\{-\frac{9}{8}+\frac{1}{8}\cdot\sqrt{449};-\frac{9}{8}-\frac{1}{8}\cdot\sqrt{449}\right\}$$

c) $2\cdot x^2+6=2x+18$; $2\cdot x^2-2\cdot x+6-18=0$; $2\cdot x^2-2\cdot x-12=0$; $2\cdot(x^2-x-6)=0$

$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1^2-(4\cdot 1\cdot(-6))}}{2\cdot 1}=\frac{1\pm 5}{2}$; L = {-2;3}